MŰEGYETEM 1782

Tézisfüzet

Minimálisan szívós gráfok

Varga Kitti

Témavezető: Dr. Katona Gyula Y.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2021

1. Bevezetés

A dolgozatban előforduló gráfok végesek, egyszerűek és irányítatlanok.

A szívósság fogalmát Chvátal vezette be [13] a Hamilton-körök vizsgálatához. A Hamilton-köröket már korábban is széleskörűen tanulmányozták, többek között Karp 21 NP-teljes problémáinak egyike éppen annak eldöntése, hogy egy gráf tartalmaz-e Hamilton-kört [19].

A Hamilton-körök létezésére több szükséges, illetve elégséges feltételt adtak már. Az ismertebb elégséges feltételek a gráf csúcsainak fokszámára vonatkoznak. Dirac tétele szerint ha egy $n \geq 3$ csúcsú gráfban minden csúcs fokszáma legalább $n/2$, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört. Egy meglehetősen egyszerű szükséges feltételből adódik a szívósság definíciója: ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor akárhány csúcsot elhagyva a gráf legfeljebb annyi komponensre eshet szét, amennyi az elhagyott csúcsok száma. Ez utóbbi tulajdonsággal rendelkező gráfokat 1-szívósnak nevezzük, általában pedig egy gráfot t-szívósnak hívunk (ahol t egy pozitív valós szám), ha tetszőleges S ponthalmazt elhagyva a gráf legfeljebb $|S|/t$ komponensre esik szét, ha szétesik egyáltalán, továbbá minden gráfot 0-szívósnak tekintünk. Egy gráf szívósságán azt a legnagyobb t számot értjük, amelyre a gráf t-szívós, ahol is a teljes gráfok szívósságát végtelennek definiáljuk. Így például a nemösszefüggő gráfok szívóssága 0, a legalább négy hosszú köröké 1, azonban a háromhosszú köré végtelen, hiszen az egy teljes gráf.

Ugyan tudjuk, hogy nem minden 1-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört (egy jól ismert példa erre a Petersen-gráf), Chvátal már az első szívósságról szóló cikkében [13] azt sejtette, hogy létezik olyan t_0 pozitív valós szám, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört. Az erősebb sejtése az volt, hogy minden olyan gráf, amelynek a szívóssága nagyobb, mint $3/2$, tartalmaz Hamilton-kört – ezt a sejtését azonban Thomassen megcáfolta [12]. Ezután azt sejtették (a [15] cikk alapján), hogy minden 2-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört – ezt a sejtést Bauer, Broersma és Veldman cáfolta meg [7]. Egész pontosan azt mutatták meg, hogy tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $(9/4-\varepsilon)$-szívós gráf, amely nem tartalmaz Hamilton-utat. Ebből az következik, hogy ha Chvátal t_0-sejtése igaz, akkor $t_0 \geq 9/4$. A sejtés továbbra is nyitott, de néhány gráfosztályban már belátták, hogy igaz: többek között tudjuk, hogy az 1-szívós intervallumgráfok tartalmaznak Hamilton-kört [20] csakúgy, mint a $3/2$-szívós split gráfok [21] és a 10-szívós merevkörű gráfok [17].

A dolgozatban a fő hangsúly a minimálisan szívós gráfokon van. Egyszerű látni, hogy minél több éle van egy gráfnak, annál nagyobb lehet a szívóssága. Egy gráfot minimálisan t-szívósnak nevezünk (ahol t egy pozitív valós szám vagy végtelen), ha a gráf szívóssága pontosan t, de ez bármely élt elhagyva csökken. Például minden legalább két csúcsú teljes gráf minimálisan ∞-szívós és minden legalább négy hosszú kör minimálisan 1-szívós.

A szívósság definíciójából azonnal adódik, hogy minden t-szívós nemteljes gráf $2t$-szeresen összefüggő, és így a minimális fokszáma legalább $\lceil 2t \rceil$ (ahol t egy nemnegatív valós szám). Mader egy tétele alapján, miszerint minden minimálisan k-szorosan összefüggő gráfnak van k-adfokú csúcsa (ahol k egy pozitív egész szám) [24], megfogalmazható egy sejtés a minimálisan szívós gráfok minimális fokszámáról is. Ez a sejtés írásban csak a $t = 1$ esetről jelent meg Kriesell neve alatt [18], de egyszerűen általánosítható tetszőleges t pozitív valós számra is: minden minimálisan t-szívós gráfnak van $\lceil 2t \rceil$-edfokú csúcsa. Mivel azonban nem minden minimálisan szívós gráf lesz egyben minimálisan összefüggő is, ezért Kriesell sejtése nem következik azonnal Mader tételéből.

Mivel minden Hamilton-kört tartalmazó gráf 1-szívós (és a K_3 gráf szívóssága végtelen), ezért a minimálisan 1-szívós, Hamilton-kört tartalmazó gráfok kizárólag a legalább négy hosszú körök. Így Dirac korábban említett tétele egy triviális felső korlátot ad az n-csúcsú minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszámára: a négyhosszú körtől eltekintve ez mindig kisebb, mint $n/2$. Miután a 2. fejezetben kimondjuk a szükséges definíciókat és alapvető állításokat, a 3. fejezetben (ami a [3] cikkünkön alapul) egy konstans faktorral javítunk ezen a felső korláton: megmutatjuk, hogy minden n-csúcsú, minimálisan 1-szívós gráfnak van legfeljebb $(n/3 + 1)$-edfokú csúcsa.

Bauer, Hakimi és Schmeichel belátták, hogy a t-szívós gráfok felismerése coNP-nehéz [8], a 4. fejezetben (ami a [2] cikkünkön alapul) pedig megmutatjuk, hogy a minimálisan t-szívós gráfok felismerése DP-nehéz. A DP nevű bonyolultsági osztályt Papadimitriou és Yannakakis definiálták [26], mivel az extremális problémák általában nem tűnnek NP $\cup$ coNP-belieknek. Egy L nyelvről akkor mondjuk, hogy DP-beli, ha kifejezhető egy NP-beli és egy coNP-beli nyelv metszeteként.

Végül az 5. fejezetben (ami a [4] cikkünkön alapul) páros gráfokat vizsgálunk. Bár a K_1 és K_2 kivételével minden páros gráf szívóssága legfeljebb 1, az 1-szívós páros gráfokat nem könnyebb felismerni, mint általában az 1-szívós gráfokat: Kratsch, Lehel és Müller bebizonyították, hogy ez a probléma is coNP-nehéz [21]. Ebben a fejezetben kiterjesztjük ezt a tételt tetszőleges $t \leq 1$ pozitív racionális számra. Továbbá belátjuk, hogy tetszőleges $k \geq 2$

egész és $t \leq 1$ pozitív racionális szám esetén a t-szívós, k-szorosan összefüggő, páros gráfok felismerése is coNP-nehéz, és az 1-szívós, legalább 6-reguláris, páros gráfoké is. Valamint a minimálisan 1-szívós, páros gráfok minimális fokszámára adunk egy jobb felső korlátot annál, mint amit korábban általánosan adtunk: belátjuk, hogy minden n-csúcsú, minimálisan 1-szívós, páros gráfnak van legfeljebb $(n+6)/4$ fokszámú csúcsa.

2. Előzmények

Ebben a fejezetben a fontosabb definíciókat és állításokat ismertetjük.

Jelölje $\omega(G)$ a G gráf komponenseinek a számát, $\alpha(G)$ a független csúcsok maximális számát és $\kappa(G)$ a gráf összefüggőségi számát. Egy G összefüggő gráf $S \subseteq V(G)$ ponthalmazát elvágó ponthalmaznak nevezzük, ha az elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.

(A G komponenseinek számát $\omega(G)$-vel jelölni zavaró lehet, azonban a gráfszívósságról szóló cikkek többsége ezt a jelölést alkalmazza.)

A szívósság fogalmát Chvátal vezette be [13] a Hamilton-körök vizsgálatához.

2.1. Definíció. Legyen t egy valós szám. Egy G gráfot t-szívósnak nevezünk, ha tetszőleges olyan $S \subseteq V(G)$ ponthalmaz esetén, melynek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét, $|S| \geq t\omega(G-S)$ teljesül. A legnagyobb olyan t számot, amelyre G még t-szívós, a gráf szívósságának nevezzük és $\tau(G)$-vel jelöljük; tetszőleges $n \geq 1$ egész szám esetén legyen $\tau(K_n) = \infty$.

Egyszerű látni, hogy minél több éle van egy gráfnak, annál nagyobb lehet a szívóssága. A dolgozatban a fő hangsúly azon gráfokon van, melyek szívóssága bármely élük elhagyása esetén csökken.

2.2. Definíció. Egy G gráfot minimálisan t-szívósnak nevezünk, ha $\tau(G) = t$ és tetszőleges $e \in E(G)$ esetén $\tau(G-e) < t$.

A t-szívós gráfok vizsgálata bonyolultságelméleti szempontból is érdekes.

Legyen t egy tetszőleges pozitív racionális szám és tekintsük a következő eldöntési problémát.

t-szívós
Bemenet: egy G gráf.
Kérdés: igaz-e, hogy $\tau(G) \geq t$?

Vegyük észre, hogy a t szám nem része a bemenetnek.

Erre a problémára a MAXFTLN probléma (melyben egy adott G gráfról és k pozitív egészről kell eldönteni, hogy van-e a G gráfban k méretű független ponthalmaz) egy változatát visszavezetve Bauer, Hakimi és Schmeichel belátták, hogy tetszőleges t pozitív racionális szám esetén a t-SZÍVÓS probléma coNP-teljes [8].

Bauer, van den Heuvel, Morgana és Schmeichel azt is megmutatták, hogy tetszőleges $r \geq 3$ esetén az 1-SZÍVÓS probléma coNP-teljes marad az r-reguláris gráfok körében is [10].

Habár a K_1 és K_2 kivételével minden páros gráf szívóssága legfeljebb 1, az 1-SZÍVÓS probléma nem lesz könnyebb akkor sem, ha kizárólag a páros gráfokat tekintjük. Kratsch, Lehel és Müller bebizonyították, hogy az 1-SZÍVÓS probléma coNP-teljes marad a páros gráfok körében is [21].

Azonban bizonyos gráfosztályokban, például a split gráfok körében a szívósság polinomidőben kiszámolható: Woeginger belátta, hogy tetszőleges t pozitív racionális szám esetén polinomidőben felismerhetők a t-szívós split gráfok.

Legyen t egy tetszőleges pozitív racionális szám és most tekintsük a t-SZÍVÓS probléma következő változatait.

PONTOSAN-t-SZÍVÓS
Bemenet: egy G gráf.
Kérdés: igaz-e, hogy $\tau(G) = t$?

MIN-t-SZÍVÓS
Bemenet: egy G gráf.
Kérdés: igaz-e, hogy G minimálisan t-szívós?

Mivel az extremális problémák általában nem tűnnek $\mathrm{NP} \cup \mathrm{coNP}$-beliek-nek, ezért Papadimitriou és Yannakakis definiálták a DP nevű bonyolultsági osztályt [26].

2.3. Definíció. Egy L nyelvet DP-belinek nevezünk, ha léteznek olyan $L_1 \in \mathrm{NP}$ és $L_2 \in \mathrm{coNP}$ nyelvek, hogy $L = L_1 \cap L_2$.

Egy nyelvet DP-nehéznek nevezünk, ha tetszőleges DP-beli nyelv polinomiálisan visszavezethető rá. Egy nyelvet DP-teljesnek nevezünk, ha az DP-beli és DP-nehéz is.

Fontos megjegyezni, hogy amennyiben $\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP}$, úgy $\mathrm{DP} \neq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$, sőt, $\mathrm{NP} \cup \mathrm{coNP} \subseteq \mathrm{DP}$.

Az alábbiakban felsorolunk néhány DP-teljes problémát, melyeket a polinomiális visszavezetéseknél használni fogunk.

EgzaktFTLN
Bemenet: egy G gráf és egy k pozitív egész szám.
Kérdés: igaz-e, hogy $\alpha(G) = k$?

Vegyük észre, hogy a t-szívós problémában szereplő t számmal ellentétben itt most a k szám a bemenet része. Az EgzaktFTLN probléma DP-teljessége azonnal adódik a következő probléma DP-teljességéből, mely utóbbit Papadimitriou és Yannakakis bizonyították [26].

EgzaktKlikk
Bemenet: egy G gráf és egy k pozitív egész szám.
Kérdés: igaz-e, hogy G klikkszáma éppen k?

Most tekintsük a következő eldöntési problémát.

α-kritikus
Bemenet: egy G gráf és egy k pozitív egész szám.
Kérdés: igaz-e, hogy $\alpha(G) < k$, de tetszőleges $e \in E(G)$ esetén $\alpha(G - e) \geq k$?

Az α-kritikus probléma DP-teljessége azonnal adódik a következő probléma DP-teljességéből, mely utóbbit Papadimitriou és Wolfe bizonyították [25].

Klikk-kritikus
Bemenet: egy G gráf és egy k pozitív szám.
Kérdés: igaz-e, hogy G-ben nincs k méretű klikk, de tetszőleges hiányzó e élt hozzávéve a gráfhoz a kapott $G + e$ gráfnak már lesz k méretű klikkje?

3. Minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszáma

A szívósság definíciójából azonnal adódik, hogy minden t-szívós nemteljes gráf $2t$-szeresen összefüggő, és így a minimális fokszáma legalább $\lceil 2t \rceil$ (ahol t egy nemnegatív valós szám).

A következő sejtés Mader egy tételének analógiája, miszerint minden minimálisan k-szorosan összefüggő gráfnak van k-adfokú csúcsa (ahol k egy pozitív egész szám) [24].

Sejtés 3.1 (Kriesell [18])**.** Minden minimálisan 1-szívós gráfnak van másodfokú csúcsa.

Ez a sejtés egyszerűen általánosítható tetszőleges t pozitív valós számra is.

Sejtés 3.2 (Általánosított Kriesell-sejtés)**.** Minden minimálisan t-szívós gráfnak van $\lceil 2t \rceil$-edfokú csúcsa.

Mivel nem minden minimálisan szívós gráf lesz egyben minimálisan összefüggő is, ezért a 3.2. sejtés nem következik azonnal Mader tételéből.

Nyilván ha egy gráf tartalmaz Hamilton-kört, akkor a gráf 1-szívós. Azonban nem minden 1-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört: egy jól ismert példa erre a Petersen-gráf. Viszont Chvátal azt sejtette, hogy létezik olyan t_0 pozitív valós szám, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört [13]. A sejtés továbbra is nyitott, de azt tudjuk, hogy amennyiben igaz, úgy $t_0 \geq 9/4$ kell, hogy teljesüljön [7].

Mivel minden Hamilton-kört tartalmazó gráf 1-szívós (és a K_3 gráf szívóssága végtelen), ezért a minimálisan 1-szívós, Hamilton-kört tartalmazó gráfok kizárólag a legalább négy hosszú körök. Így Dirac tétele egy triviális felső korlátot ad a minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszámára: a négyhosszú körtől eltekintve ez mindig kisebb, mint $n/2$, ugyanis az említett tétel szerint ha egy $n \geq 3$ csúcsú gráfban minden csúcs fokszáma legalább $n/2$, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört [14].

A következő tétel ezen a felső korláton javít.

Tétel 3.3 (Katona, Soltész, Varga, [3])**.** Minden n-csúcsú, minimálisan 1-szívós gráfnak van legfeljebb $(n/3+1)$-edfokú csúcsa.

Az 5. fejezetben megmutatjuk, hogy ha feltesszük azt, hogy a gráf páros, akkor nem csak sokkal könnyebbé válik a bizonyítás, de még jobb felső korlátot is tudunk adni a minimális fokszámra.

4. Minimálisan szívós gráfok felismerése

Ebben a fejezetben a minimálisan szívós gráfok felismerésével foglalkozunk. A fő eredményünk a következő.

Tétel 4.1 (Katona, Kovács, Varga, [2]). Tetszőleges t pozitív racionális szám esetén a MIN-t-SZÍVÓS probléma DP-teljes.

Megjegyezzük, hogy mivel minden nemteljes gráf szívóssága egy racionális szám, ezért nem létezik irracionális szívósságú, minimálisan szívós gráf.

A 4.1. tételt három részletben látjuk be. Amikor $1/2 < t < 1$ és $t \geq 1$, akkor az α-KRITIKUS probléma egy változatát, amikor pedig $t \leq 1/2$, akkor pedig a MIN-1-SZÍVÓS probléma egy változatát vezetjük vissza polinomiálisan a MIN-t-SZÍVÓS problémára.

5. Páros gráfok szívósságával kapcsolatos eredmények általánosításai

Először néhány páros gráfokra vonatkozó bonyolultságelméleti tételt bizonyítunk.

Tétel 5.4 (Katona, Varga, [4]). Tetszőleges $t \leq 1$ pozitív racionális szám esetén a t-TOUGH probléma coNP-teljes a páros gráfok körében.

Ahogy korábban már említettük, a $t = 1$ esetet Kratsch, Lehel és Müller már korábban belátták [21].

Két nyitott probléma kapcsán, melyek

Az 1-szívós, 3-szorosan összefüggő, páros gráfok, illetve az 1-szívós, 3-reguláris, páros gráfok felismerhetőségét illető nyitott problémák által motiválva [9] belátjuk a következőket.

Tétel 5.8 (Katona, Varga, [4]). Tetszőleges $k \geq 2$ egész és $t \leq 1$ pozitív racionális szám esetén a t-SZÍVÓS probléma coNP-teljes a k-szorosan összefüggő páros gráfok körében.

Tétel 5.9 (Katona, Varga, [4]). Tetszőleges $r \geq 6$ egész szám esetén az 1-SZÍVÓS probléma coNP-teljes az r-reguláris páros gráfok körében.

Végül a 3.3. tételbeli felső korlátnál jobbat bizonyítunk páros gráfokra.

Tétel 5.19 (Katona, Varga). Minden n-csúcsú, minimálisan 1-szívós, páros gráfnak van legfeljebb $(n + 6)/4$ fokszámú csúcsa.

Összefoglalás

A dolgozatban a fő hangsúly a minimálisan szívós gráfokon van.

A 3. fejezet alapjául Kriesell sejtése szolgál, mely szerint minden n-csúcsú minimálisan 1-szívós gráfnak van másodfokú csúcsa. Ebben a fejezetben egy felső korlátot adunk a minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszámára: megmutatjuk, hogy ez legfeljebb $n/3 + 1$ lehet.

A 4. fejezetben a minimálisan t-szívós gráfok felismerhetőségének bonyolultságával foglalkozunk. Belátjuk, hogy ez a probléma tetszőleges t pozitív racionális szám esetén DP-nehéz.

Az 5. fejezet páros gráfokról szól. Először belátjuk, hogy tetszőleges $t \leq 1$ pozitív racionális szám esetén a t-szívós páros gráfok felismerése coNP-nehéz (a $t = 1$ eset már korábban is ismert volt). Az 1-szívós, 3-szorosan összefüggő, páros gráfok, illetve az 1-szívós, 3-reguláris, páros gráfok felismerhetőségét illető nyitott problémák által motiválva [9] belátjuk, hogy tetszőleges $k \geq 2$ és $r \geq 6$ egész számok, valamint $t \leq 1$ pozitív racionális szám esetén a t-szívós, 3-szorosan összefüggő, páros gráfok, illetve az 1-szívós, r-reguláris, páros gráfok felismerése coNP-nehéz.

Publikációs lista

[1] M. Kano, G. Y. Katona, and K. Varga, *Decomposition of a graph into two disjoint odd subgraphs*, Graphs and Combinatorics **34 (6)** (2018), 1581–1588.

[2] G. Y. Katona, I. Kovács, and K. Varga, *The complexity of recognizing minimally t-tough graphs*, Discrete Applied Mathematics **294** (2021), 55–84.

[3] G. Y. Katona, D. Soltész, and K. Varga, *Properties of minimally t-tough graphs*, Discrete Mathematics **341** (2018), 221–231.

[4] G. Y. Katona and K. Varga, *Strengthening some complexity results on toughness of graphs*, Discussiones Mathematicae, posted on 2020, DOI 10.7151/dmgt.2372.

[5] I. Kovács, T. Várady, and K. Varga, *A new set of base functions for parametric curve and surface design*, Proceedings of Workshop on the Advances of Information Technology (2017), 101–111.

[6] R. Molontay and K. Varga, *On the complexity of color-avoiding site and bond percolation*, Proceedings of the 45th International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, 2019, pp. 354–367.

Hivatkozások

[7] D. Bauer, H. J. Broersma, and H. J. Veldman, *Not every 2-tough graph is Hamiltonian*, Discrete Applied Mathematics **99** (2000), 317–321.

[8] D. Bauer, S. L. Hakimi, and E. Schmeichel, *Recognizing tough graphs is NP-hard*, Discrete Applied Mathematics **28** (1990), 191–195.

[9] D. Bauer, J. van den Heuvel, A. Morgana, and E. Schmeichel, *The complexity of recognizing tough cubic graphs*, Discrete Applied Mathematics **79** (1997), 35–44.

[10] D. Bauer, J. van den Heuvel, A. Morgana, and E. Schmeichel, *The Complexity of Toughness in Regular Graphs*, Congressus Numerantium **130** (1998), 47–61.

[11] D. Bauer, A. Morgana, and E. Schmeichel, *On the complexity of recognizing tough graphs*, Discrete Mathematics **124** (1994), 13–17.

[12] J. C. Bermond, *Hamiltonian graphs*, Selected Topics in Graph Theory (L. Beinecke and R. J. Wilson, eds.), Academic Press, London, 1978, pp. 127–167.

[13] V. Chvátal, *Tough graphs and hamiltonian circuits*, Discrete Mathematics **5** (1973), 215–228.

[14] G. A. Dirac, *Some Theorems on Abstract Graphs*, Proceedings of The London Mathematical Society **2** (1952), 69–81.

[15] H. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis, and A. Saito, *Toughness and the existence of k-factors*, Journal of Graph Theory **9** (1985), 87–95.

[16] R. Häggkvist and G. G. Nicoghossian, *A remark on Hamiltonian cycles*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **30** (1981), 118–120.

[17] A. Kabela and T. Kaiser, *10-tough chordal graphs are Hamiltonian*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **122** (2017), 417–427.

[18] T. Kaiser, *Problems from the workshop on dominating cycles*, http://iti.zcu.cz/history/2003/Hajek/problems/hajek-problems.ps.

[19] R. Karp, *Reducibility Among Combinatorial Problems*, Complexity of Computer Computations **40** (1972), 85–103.

[20] M. Keil, *Finding Hamiltonian Circuits in Interval Graphs*, Information Processing Letters **20** (1985), 201–206.

[21] D. Kratsch, J. Lehel, and H. Müller, *Toughness, hamiltonicity and split graphs*, Discrete Mathematics **150** (1996), 231–245.

[22] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2007.

[23] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching Theory*, Annals of Discrete Mathematics, Volume 29, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[24] W. Mader, *Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen*, Archiv der Mathematik **22** (1971), 333–336.

[25] C. H. Papadimitriou and D. Wolfe, *The Complexity of Facets Resolved*, Journal of Computer and System Sciences **37** (1988), 2–13.

[26] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, *The Complexity of Facets (and Some Facets of Complexity)*, Journal of Computer and System Sciences **28** (1984), 244–259.

[27] G. J. Woeginger, *The toughness of split graphs*, Discrete Mathematics **190** (1998), 295–297.